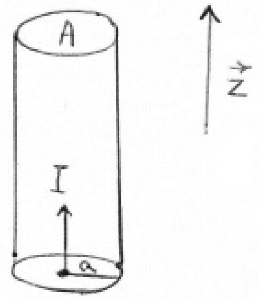
۴.۱۶ یک سیم مستقیم فلزی با رسانندگی g وسطح مقطع A حامل جریان پایای I است. اندازه وجهت بردار پوئین‌تینگ را در روی سطح این‌سیم به‌دست‌آورید. ازمؤلفهٔ عمودی بردارپوئین‌تینگ درروی قسمتی‌ازسطح سیم به‌طول L انتگرال بگیرید ونتیجه را با گرمای ژولی که دراین قسمت تولید می‌شود، مقایسه کنید.



$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{J} = g\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{g} \Rightarrow E = \frac{J}{g}$$

$$J = \frac{I}{A} \Rightarrow E = \frac{I}{gA} \quad , \quad \vec{E} = \frac{I}{gA}\hat{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \oint_C \vec{H}\, d\vec{L} = I$$

$$\Rightarrow H(2\pi a) = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi a} \quad , \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi a}\hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \left(\frac{I}{gA}\right)\left(\frac{I}{2\pi a}\right)\hat{k} \times \hat{\phi} = -\frac{I^2}{2\pi a g A}\hat{\rho} \qquad \hat{n} = \hat{\rho}$$

$$\int \vec{S} \cdot \hat{n}\, da = -\frac{I^2}{2\pi a A g}\int da = -\frac{I^2}{2\pi a A g}\underbrace{(2\pi a l)}_{\text{مساحت سطح پیرامونی استوانه}} = -\frac{I^2 L}{Ag}$$

$$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{L}{Ag} \Rightarrow \int \vec{S} \cdot \hat{n}\, da = -I^2 R$$

۱۰.۱۶ نشان دهید درخلاء باه $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$، معادلات ماکسول به‌طورصحیحی تنها از یك تابع برداری $\mathbf{A}$ که درمعادلات زیرصدق کند، به‌دست می‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

پیمانه‌ای‌که درآن $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ باشد پیمانهٔ کولنی نامیده می‌شود.

$\rho = 0 \qquad J = 0$

$$① \ \nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad ② \ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

③ شرط لورنتس $\quad \nabla \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \xrightarrow[\nabla \cdot \vec{A} = 0]{} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \ , \quad \vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- حال به سراغ معادلات ماکسول می‌رویم.

$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \quad \checkmark$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon \nabla \cdot \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = -\varepsilon \nabla^2 \Phi - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} \xrightarrow[\text{با توجه به ①}]{}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = -\varepsilon \nabla^2 \Phi$$

- از طرفی با توجه به معادله‌ی موج برای Φ داریم:

$$\nabla^2 \Phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \xrightarrow[\rho = 0]{\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \ \text{با توجه به ③}} \nabla^2 \Phi = 0$$

- بنابراین

$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad \checkmark \quad$ (با توجه به فرض مسأله $\rho = 0$)

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \xrightarrow{\nabla \times \nabla \Phi = 0} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \checkmark$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\mu_0}\left[\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}\right]$$

$$\xrightarrow{\nabla \cdot \vec{A} = 0} \nabla \times \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\nabla \cancel{\frac{\partial \Phi}{\partial t}} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

با توجه به ③

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \checkmark$$

(طبق فرض مسأله) $J = 0$

۵.۱۷ زمین تقریباً $1300 W/m^2$ انرژی تابشی از خورشید دریافت می کند. با فرض آنکه این انرژی به‌صورت موج تکفامی باقطبش تخت است و با فرض فرود عمودی، اندازهٔ بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی خورشید را محاسبه کنید.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$S = |\vec{S}| = 1300 \ \frac{w}{m^2}$$

$$\vec{B} = \frac{n}{c} \ \vec{U} \times \vec{E} \Rightarrow H = \frac{n}{\mu_0 c} \ \vec{U} \times \vec{E}$$

$$\vec{S} = \frac{n}{\mu_0 c} \left(\vec{E} \times \vec{U} \times \vec{E} \right) = \frac{n}{\mu_0 c} \left(\vec{U} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \, (\cancel{\vec{E} \cdot \vec{U}}) \right)$$

چون موج عرضی است

$$\vec{S} = \frac{n}{\mu_0 c} E^2 \vec{U}$$

$$S = \frac{n}{\mu_0 c} E^2 \Rightarrow E^2 = \left(\frac{\mu_0 c}{n} S \right) \xrightarrow{n=1}$$

$$\Rightarrow E = (\mu_0 c S)^{1/2} = (4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^{8} \times 1300)^{1/2} = 700/09 \ \frac{V}{m}$$

$$B = \frac{E}{c} = 2/33 \times 10^{-6} \ T$$

۹.۱۷ برای موجی تخت درمحیطی رسانا، داریم $\mathbf{B}=\frac{\hat{n}}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{E}$

فرض کنید $\mathbf{E}$ قطبش بیضوی دارد و $\hat{\mathbf{E}}=E_p e^{i\phi}\mathbf{p}+E_s\mathbf{s}$. ثابت کنید در هر لحظه اززمان

$$\operatorname{Re}\mathbf{E}\cdot\operatorname{Re}\mathbf{B}=-\frac{k}{c}E_pE_s\sin\phi$$

$$\vec{E}=E_p e^{i\phi}\vec{p}+E_s\vec{s}$$

$$E_p=\hat{E}_p e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} \qquad E_s=\hat{E}_s e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$\vec{E}=E_p e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\phi)}\vec{p}+E_s e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\vec{s}$$

$$\operatorname{Re}\vec{E}=E_p\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\phi)\vec{p}+E_s\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{s}$$

$$\vec{B}=\frac{\hat{n}}{c}\vec{u}\times\vec{E}$$

$$\vec{B}=\left(\frac{n+ik}{c}\right)\vec{u}\times\vec{E}$$

$$\vec{B}=\left(\frac{n+ik}{c}\right)\left[\left(-E_s e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\right)\vec{p}-\left(-E_p e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\phi)}\right)\vec{s}\right]$$

$$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\vec{B}=\left(-\frac{n}{c}E_s e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}-\frac{kE_s}{c}e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\pi}{2})}\right)\vec{p}$$

$$+\left(\frac{n}{c}E_p e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\phi)}+\frac{kE_p}{c}e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\phi-\frac{\pi}{2})}\right)\vec{s}$$

$$\operatorname{Re}\vec{B}=\left(-\frac{n}{c}E_s\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})-\frac{kE_s}{c}\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})\right)\vec{p}$$

$$+\left(\frac{n}{c}E_p\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\phi)+\frac{kE_p}{c}\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\phi)\right)\vec{s}$$

$$\mathrm{Re}\vec{E} \cdot \mathrm{Re}\vec{B}$$

$$= -\frac{n}{c} E_p E_s \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi) - \frac{k E_s E_p}{c} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi) \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

$$+ \frac{n}{c} E_s E_p \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi) + \frac{k E_s E_p}{c} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi)$$

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = A \Rightarrow \mathrm{Re}\vec{E} \cdot \mathrm{Re}\vec{B} = \frac{E_p E_s}{c} \left(-k\cos(A-\phi) \sin A + k\cos(A) \sin(A-\phi) \right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\vec{E} \cdot \mathrm{Re}\vec{B} = -\frac{k E_s E_p}{c} \sin\phi$$

$$\sin(\phi + A - A) = \sin(A + (\phi - A)) = \sin A \cos(\phi - A) + \cos A \sin(\phi - A)$$

$$= \sin A \cos(A - \phi) - \cos A \sin(A - \phi)$$

۵.۱۸. یک موج نوری باقطبش p درهوا ازیک سطح فلزی منعکس می‌شود. بافرض آنکه $\cos\theta_2 \cong 1$ (فرضی که غالباً صحیح است) R_p را محاسبه کنید. مقدار θ_1 راکه در آن R_p مینیمم می‌شود پیدا کنید. این مقدار θ_1 و R_p مربوط را به ازای $n=1$ ، $k=6$ (مقادیرمناسب برای آلومینیم) محاسبه کنید.

$$R_p = \left|\hat{r}_{12p}\right|^2 = \hat{r}_{12p}\,\hat{r}^*_{12p}$$

$$\hat{r}_{12p} = \frac{\hat{n}_2\cos\theta_1 - n_1\cos\hat{\theta}_2}{\hat{n}_2\cos\theta_1 + n_1\cos\hat{\theta}_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 1 \\ \hat{n}_2 = n + ik \\ \cos\hat{\theta}_2 \simeq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{r}_{12p} = \frac{(n+ik)\cos\theta_1 - 1}{(n+ik)\cos\theta_1 + 1} = \frac{(n\cos\theta_1 - 1) + ik\cos\theta_1}{(n\cos\theta_1 + 1) + ik\cos\theta_1}$$

$$R_p = \frac{(n\cos\theta_1 - 1)^2 + k^2\cos^2\theta_1}{(n\cos\theta_1 + 1)^2 + k^2\cos^2\theta_1} \qquad x = \cos\theta_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_p = \frac{(nx-1)^2 + k^2x^2}{(nx+1)^2 + k^2x^2} \qquad \frac{dR_p}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left[2(nx-1)n + 2k^2x\right]\left[(nx+1)^2 + k^2x^2\right] - \left[2(nx+1)n + 2k^2x\right]\left[(nx-1)^2 + k^2x^2\right]}{(\text{جملهٔ مخرج})^2} = 0$$

$$nx - 1 = A \qquad k^2x^2 = B$$

$$\text{صورت کسر} = 0 \Rightarrow \left[\cancel{2}nA + \cancel{2}\frac{B}{x}\right]\left[(A+2)^2 + B\right] = \left[2(A+2)n + 2\frac{B}{x}\right]\left[A^2 + B\right]$$

$$\left(nA + \frac{B}{x}\right)\left(A^2 + 4A + 4 + B\right) = \left(An + 2n + \frac{B}{x}\right)\left(A^2 + B\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{nA^3} + 4nA^2 + 4nA + \cancel{nAB} + \cancel{\frac{A^2B}{x}} + \frac{4AB}{x} + \frac{4B}{x} + \cancel{\frac{B^2}{x}}$$

$$= \cancel{nA^3} + \cancel{nAB} + 2nA^2 + 2nB + \cancel{\frac{A^2B}{x}} + \cancel{\frac{B^2}{x}}$$

$$2nA^2 + 4nA + \frac{4AB}{x} + \frac{4B}{x} = 2nB$$

$$۲n(nx-1)^{۲}+۴n(nx-1)+۴(nx-1)(k^{۲}x)+۴k^{۲}x=۲nk^{۲}x^{۲}$$

$$۲n(n^{۲}x^{۲}-۲nx+1)+۴n^{۲}x-۴n+۴nk^{۲}x^{۲}-۴k^{۲}x+۴k^{۲}x=۲nk^{۲}x^{۲}$$

$$۲n^{۳}x^{۲}-۴n^{۲}x+۲n+۴n^{۲}x-۴n+۲nk^{۲}x^{۲}=۰$$

$$n^{۳}x^{۲}-n+nk^{۲}x^{۲}=۰$$

$$x^{۲}(n^{۳}+nk^{۲})=n \quad \Rightarrow \quad x^{۲}=\frac{n}{n^{۳}+nk^{۲}}$$

$$\Rightarrow \cos^{۲}\theta_{1}=\frac{1}{n^{۲}+k^{۲}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_{1}=\frac{1}{\sqrt{n^{۲}+k^{۲}}}$$

۷.۱۸ موجی با فرکانسی در گسترهٔ اعتبار رابطهٔ هاگن ـ روبنز در هوا به‌طور مایل با زاویهٔ θ_1 بر روی سطح رسانایی فرود می‌آید. نشان دهید به جای معادلهٔ (۶۰.۱۸) روابط زیر را خواهیم داشت

$$A_s = \frac{2\cos\theta_1}{k}, \qquad A_p = \frac{2}{k\cos\theta_1}$$

$$\vec{\hat{k}} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i \qquad (1)$$

$$\vec{\hat{k}} = \hat{k}\sin\hat{\theta}\,\hat{i} + \hat{k}\cos\hat{\theta}\,\hat{k} \qquad (2)$$

از حقیقی بودن $\vec{\hat{k}}\times\vec{n}$ نتیجه می‌شود

$$\Rightarrow \vec{k}_r\times\vec{n} = \vec{k}_1\times\vec{n} \Rightarrow k_r\sin\Theta = k_1\sin\theta_1 \qquad (3)$$

$$\vec{k}_i\times\vec{n} = 0 \Rightarrow$$ $\vec{k}_i$ در جهت $n = \hat{k}$ است (4)

Θ زاویهٔ حقیقی بین $\vec{k}_r$ و $\vec{n}$ است.

برای معادلهٔ ۱ داریم $\Rightarrow \vec{\hat{k}} = k_r\sin\Theta\,\hat{i} + k_r\cos\Theta\,\hat{k} + ik_i\hat{k}$

با توجه به معادلهٔ ۳ $\Rightarrow \vec{\hat{k}} = k_1\sin\theta_1\,\hat{i} + (k_r\cos\Theta + ik_i)\hat{k} \qquad (5)$

ـ با مقایسهٔ معادلهٔ ۲ و ۵ داریم:

$$k_1\sin\theta_1 = \hat{k}\sin\hat{\theta} \qquad (6)$$

$$k_r\cos\Theta + ik_i = \hat{k}\cos\hat{\theta} \qquad (7)$$

ـ با انتخاب p و q:

$$\hat{k}\cos\hat{\theta} = (p+iq)\frac{\omega}{c} \qquad (8)$$

$$\hat{n}\cos\hat{\theta} = p+iq \qquad (9)$$

از ۷ و ۸ $\Rightarrow p\dfrac{\omega}{c} = k_r\cos\Theta \qquad q\dfrac{\omega}{c} = k_i$

از معادلهٔ ۳ $\Rightarrow k_r^2\sin^2\Theta = k_1^2\sin^2\theta_1 \Rightarrow k_r^2(1-\cos^2\Theta) = k_1^2\sin^2\theta_1$

$$\xrightarrow[\frac{\omega}{c}p = k_r\cos\Theta]{k_1 = n_1\frac{\omega}{c}} k_r^2 - \frac{p^2\omega^2}{c^2} = \frac{n^2\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1 \Rightarrow k_r = \frac{\omega}{c}\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1} \qquad (10)$$

از معادلهٔ ۳ $\Rightarrow k_r\sin\Theta = k_1\sin\theta_1 \xrightarrow[\text{از معادلهٔ ۱۰}]{k_1 = n_1\frac{\omega}{c}} \left(\dfrac{\omega}{c}\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1}\right)\sin\Theta = \left(n_1\dfrac{\omega}{c}\right)\sin\theta_1$

$$\Rightarrow n_1\sin\theta_1 = \left(\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1}\right)\sin\Theta \qquad (11)$$

- در حالتیکه به فرمول هاگن - روبنز منجر می‌شود داریم:

$$P \cong n \cong q \cong k \gg 1$$

از (۱۱) $\Rightarrow \sin\Theta = \dfrac{n_1 \sin\Theta_1}{\sqrt{p^2 + n_1^2 \sin\Theta_1}} \xrightarrow[\text{ثابت } \Theta_1]{\text{چون } n_1 \text{ ثابت}}$ در محدوده‌ی هاگن-روبنز ($P \gg 1$) Θ تقریباً صفر است.

از (۴) $\Rightarrow k_1 \sin\Theta_1 = \hat{k} \sin\hat{\Theta}$

$$\Rightarrow k_2 \sin\Theta = \hat{k} \sin\hat{\Theta}$$

از (۳) $\Rightarrow k_1 \sin\Theta_1 = k_2 \sin\Theta$

$$\xrightarrow[\Theta \simeq 0]{\hat{k} \neq 0} \sin\hat{\Theta} \simeq 0 \Rightarrow \cos\hat{\Theta} \simeq \sqrt{1 - \sin^2\hat{\Theta}} \simeq 1$$

$$A_p = 1 - R_p \qquad R_p = |\hat{r}_{12p}|^2$$

$$A_s = 1 - R_s \qquad R_s = |\hat{r}_{12s}|^2$$

$$\hat{r}_{12p} = \frac{\hat{n}_2 \cos\Theta_1 - n_1 \cos\hat{\Theta}_2}{\hat{n}_2 \cos\Theta_1 + n_1 \cos\hat{\Theta}_2} \quad \text{و} \quad \hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos\Theta_1 - \hat{n}_2 \cos\hat{\Theta}_2}{n_1 \cos\Theta_1 + \hat{n}_2 \cos\hat{\Theta}_2}$$

$$\xrightarrow[\cos\hat{\Theta}_2 \simeq 1]{n_2 = n + ik} \hat{r}_{12p} = \frac{(n+ik)\cos\Theta_1 - 1}{(n+ik)\cos\Theta_1 + 1} = \frac{(n\cos\Theta_1 - 1) + ik\cos\Theta_1}{(n\cos\Theta_1 + 1) + ik\cos\Theta_1}$$

$$R_p = |\hat{r}_{12p}|^2 = \hat{r}_{12p}\, \hat{r}^*_{12p} = \frac{(n\cos\Theta_1 - 1)^2 + k^2\cos^2\Theta_1}{(n\cos\Theta_1 + 1)^2 + k^2\cos^2\Theta_1}$$

$$A_p = 1 - R_p = \frac{4n\cos\Theta_1}{(n\cos\Theta_1 + 1)^2 + k^2\cos^2\Theta_1}$$

چون $n \simeq k \gg 1 \Rightarrow A_p = \dfrac{4n\cos\Theta_1}{2n^2\cos\Theta_1} = \dfrac{2}{n\cos\Theta_1}$ یا $A_p = \dfrac{2}{k\cos\Theta_1}$

به همین ترتیب A_s را می‌توان بدست آورد.